b- On muni le plan au repère $R'=\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$, alors la courbe de la fonction g : IR $\longrightarrow$ IR; $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ a pour équation $y=g(x)=\sqrt{x^2+1}$ qui est l'équation de (C) dans $R'=\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$\Rightarrow$ Dans $R'=\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$,la courbe (C) est la représentation graphique de la fonction g.

2)a- $u(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 2$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 - 2X - 1 = 0 \end{cases} \qquad (\Delta' = 1+1=2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X = 1-\sqrt{2} \text{ ou } X = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 1+\sqrt{2}$ ou $e^{\frac{x}{2}} = 1-\sqrt{2} < 0$ impossible

$\Updownarrow$

$\frac{x}{2} = \text{Log}\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\text{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b- Soit G une primitive de g sur IR (cette primitive existe car g est continue sur IR).

Ainsi $F(x) = \int_0^{u(x)} g(t)dt = G[u(x)] - G(0)$.

la fonction u est dérivable sur IR et aussi G est dérivable sur IR qui contient u[IR] par suite, d'après le théorème de la composée de deux fonctions, on a la fonction qui à $x \mapsto G[u(x)]$ est dérivable sur IR Par suite F est dérivable sur IR.

• $\forall x \in IR; F'(x) = u'(x).G'[u(x)]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \frac{2}{4}e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{4}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}(e^x + e^{-x} + 2).$$

c- Désignons par A l'aire de la partie considerée.

$A = \int_2^3 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^{u\left(2\text{Log}(1+\sqrt{2})\right)} g(t)dt = F\left(2\text{Log}(1+\sqrt{2})\right)$

D'autre part $F(0) = \int_0^{u(0)} g(t)dt = 0$ (car $u(0) = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0$)